Épreuve de Mathématiques B

Durée 4h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précisions** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies.** En particulier les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leur calculs.

CONSIGNES :

— Composer lisiblement sur les copies avec un stylo à encre foncée : bleue ou noire

— L'usage de stylo à friction, stylo plume, liquide de correction et dérouleur de ruban correcteur est interdit.

— Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance.

— Le candidat rédigera sur trois copies qu'il intitulera :

- Mathématiques B-1 : Partie I
- Mathématiques B-2 : Partie II
- Mathématiques B-3 : Partie III

et rendra obligatoirement trois copies, même si certaines devaient être blanches, en mettant son numéro d'anonymat sur les trois copies.

À rendre en fin d'épreuve avec la copie Mathématiques B-2 une feuille de papier millimétré

La partie III peut être traité indépendamment des parties I et II

Partie I **À rédiger impérativement sur une copie intitulée Mathématiques B-I**

Si cette partie n'est pas abordée, le candidat rendra une copie blanche.

Partie I.A)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$ sur I, dont la dérivée seconde f'' prend des valeurs strictement positives sur I. x_0 désigne un réel de I.

1. Rappeler une équation de la tangente au graphe Γ_f de f au point d'abscisse x_0

2. Pour $x \in I$ on pose $\varphi(x) = f(x) - f(x_0) - (x - x_0) f'(x_0)$

   (a) Justifier que φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I et exprimer, pour $x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x)$ et $\varphi''(x)$.

   (b) Montrer que, pour $x \neq x_0$, $\varphi(x) > 0$

3. Que peut-on en déduire pour la représentation graphique de la fonction f ?

Partie I.B)

On rappelle que l'intégrale de Gauss, qui est une intégrale convergente, donnée par $I_{\mathcal{G}} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t$, a pour valeur $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Soit G la fonction qui, à tout réel $x \geqslant 0$, associe : $G(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^x \mathrm{d}t$.

1. Montrer que, pour tout réel $x \geqslant 0$, l'intégrale $G(x)$ est convergente.

2. Que vaut $G(0)$?

3. Que vaut $G\left(\dfrac{1}{2}\right)$?

4. (a) Soit A un réel strictement positif. Montrer que, pour tout réel strictement positif t, et tout réel x de $[0, A]$:
$$\left|\mathrm{e}^{-t} t^x\right| \leqslant \left(1 + t^A\right) \mathrm{e}^{-t}.$$

   (b) Montrer que G est continue sur $[0, A]$.

   (c) Montrer que G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, A]$ et exprimer pour tout réel $x \in [0, A]$, $G'(x)$ **sous la forme d'une intégrale**.

   (d) Montrer que G est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, A]$ et exprimer pour tout réel $x \in [0, A]$, $G''(x)$ **sous la forme d'une intégrale**.

(e) En déduire que la fonction G est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$.

$\boxed{\text{Partie II}}$ À rédiger impérativement sur une copie intitulée Mathématiques B-II

Si cette partie n'est pas abordée, le candidat rendra une copie blanche.

1. Montrer que, pour tout réel $x \geqslant 0$: $G(x+1) = (x+1)\, G(x)$.

2. Calculer, pour tout entier naturel n : $G(n)$.

3. Pour tout $x > -1$, on pose $\widetilde{G}(x) = \dfrac{G(x+1)}{x+1}$. Montrer que $\widetilde{G}$ prolonge G à l'intervalle $]-1, +\infty[$, et que ce prolongement est de classe $\mathcal{C}^2$ sur cet intervalle.

4. Montrer qu'au voisinage de -1^+, $\widetilde{G}(x) \sim \dfrac{1}{x+1}$.

5. Exprimer, pour tout réel $x > -1$, $\widetilde{G}''(x)$ à l'aide de x, $G(x+1)$, $G'(x+1)$ et $G''(x+1)$.
   En déduire une expression de $(x+1)^3\, \widetilde{G}''(x)$ sous la forme d'une seule intégrale.

6. Étudier le signe du trinôme du second degré $X^2 - 2X + 2$ sur $\mathbb{R}$. En déduire que $\widetilde{G}''(x) > 0$ pour tout réel $x > -1$.

7. En s'appuyant sur le préambule, que peut-on en déduire concernant le graphe $\Gamma_{\widetilde{G}}$ de $\widetilde{G}$?

8. En comparant $\widetilde{G}(0)$ et $\widetilde{G}(1)$, montrer l'existence d'un réel c de l'intervalle ouvert $]0, 1[$ tel que la courbe représentative de la fonction $\widetilde{G}$ admette, au point d'abscisse c, une tangente horizontale.

9. En déduire le signe de $\widetilde{G}'$, et dresser le tableau de variations de $\widetilde{G}$ sur $]-1, +\infty[$ (on précisera la valeur de $\lim\limits_{x \to -1^+} \widetilde{G}(x)$ et de $\lim\limits_{x \to +\infty} \widetilde{G}(x)$).

10. Tracer l'allure du graphe $\Gamma_{\widetilde{G}}$ de la fonction $\widetilde{G}$ sur la feuille de papier millimétré fournie. On donne : $c \simeq 0,46$ et $\widetilde{G}(c) \simeq 0,89$.

Partie III **À rédiger impérativement sur une copie intitulée Mathématiques B-III**

Si cette partie n'est pas abordée, le candidat rendra une copie blanche.

Soit F la fonction qui, à tout réel x, associe : $\mathrm{e}^{-x^2} \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que la fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$.

2. En appliquant des théorèmes de cours uniquement, et en évitant des calculs trop compliqués, montrer que la fonction F est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

3. Montrer que la fonction F est solution, sur $\mathbb{R}$, de l'équation différentielle :

$$y'(x) = -2\,x\,y(x) + 1 \qquad (\mathcal{E})$$

4. En recherchant le développement en série entière de F sous la forme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, donner une relation de récurrence vérifiée par les a_n, $n \geqslant 0$.

5. Pour tout entier naturel p, exprimer a_{2p} et a_{2p+1} en fonction de p.

6. En déduire le développement en série entière de F.

7. Étudier la convergence de la série de terme général

$$\frac{(-1)^n\,4^n n!}{(2n+1)!}$$

8. Donner le développement en série entière de la fonction qui, à tout réel x, associe

$$\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t$$

puis déduire de ce qui précède que, pour tout entier naturel n :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}\binom{n}{k} = \frac{4^n}{(2n+1)\binom{2n}{n}}$$

Les partie I et II étudient des propriétés de la fonction Gamma d'Euler, qui est, notamment, très utilisée en traitement du signal, par l'intermédiaire des lois de probabilité appelées loi Gamma. Ces lois sont aussi utilisées en ingénierie, pour l'analyse de la fiabilité des systèmes.

La partie III s'intéresse à un développement en série entière, mêlant équations différentielles, suites récurrentes, séries.

Corrigé

Partie I.A)

1. Une équation de la tangente à Γ_f au point d'abscisse x_0 est $\boxed{y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).}$

2. (a) f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I donc φ aussi par somme et produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$

   Pour tout $x \in I$, on a $\boxed{\varphi'(x) = f'(x) - f'(x_0)}$ et $\boxed{\varphi''(x) = f''(x).}$

   (b) D'après la question précédente, pour tout x dans I, on a $\varphi''(x) = f''(x) > 0$, donc φ' est strictement croissante sur l'intervalle I.

   Comme $\varphi'(x_0) = 0$, on en déduit que φ' est strictement négative sur l'intervalle $I \cap]-\infty, x_0[$ et strictement positive sur l'intervalle $I \cap]x_0, +\infty[$.

   Ainsi φ admet un minimum strict sur I atteint en x_0. Comme $\varphi(x_0) = 0$, on en déduit que $\boxed{\text{pour tout } x \neq x_0,\ \varphi(x) > 0.}$

3. D'après les questions 1. et 2., on déduit que

   $\boxed{\Gamma_f \text{ est strictement au dessus de ses tangentes sauf aux points de contacts.}}$

Partie I.B)

1. Soit $x \geqslant 0$, la fonction $f : t \mapsto t^x e^{-t} = e^{x\ln(t)} e^{-t}$ est continue sur $]0, +\infty[$.

   L'intégrale est donc impropre en 0 et en $+\infty$.

   <u>Étude au voisinage de 0 :</u>

   On a $f(t) = e^{x\ln(t)} e^{-t}$ d'où $\lim\limits_{t\to 0^+} f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ Dans tous les cas, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^x e^{-t}\,dt$ converge car elle est faussement impropre en 0.

   <u>Étude au voisinage de $+\infty$:</u>

   On a $e^{\frac{t}{2}} f(t) = e^{x\ln(t)} e^{-\frac{t}{2}} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissance comparée. Ainsi $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(e^{-t/2}\right)$.

   La fonction $t \mapsto e^{-t/2}$ étant intégrable en $+\infty$ on en déduit par théorème de comparaison que f l'est également, ainsi $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^x e^{-t}\,dt$ converge.

   Finalement $\boxed{\text{pour tout } x \geqslant 0, \text{ l'intégrale } G(x) \text{ est convergente.}}$

2. On a $G(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt$.

   Pour $T > 0$, on a

$$\int_0^T e^{-t}\,dt = \left[-e^{-t}\right]_0^T = 1 - e^{-T} \underset{T\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

   Ainsi $\boxed{G(0) = 1}$.

3. On a $G\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \sqrt{t}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$

On va poser le changement de variable $s = \varphi(t) = \sqrt{t}$. La fonction φ, de $]0, +\infty[$ dans $]0, +\infty[$, est de classe $\mathcal{C}^1$, bijective et strictement croissante. Pour $t > 0$ on a $\varphi'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$ et $\lim_{t\to 0} \varphi(t) = 0$, $\lim_{t\to+\infty} \varphi(t) = +\infty$

De plus l'intégrale $G\left(\frac{1}{2}\right)$ est convergente, donc par changement de variable on a

$$\begin{aligned}
G\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^{+\infty} \sqrt{t}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{2t}{2\sqrt{t}}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{+\infty} 2\varphi(t)^2\mathrm{e}^{-\varphi(t)^2}\varphi'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{+\infty} 2s^2\mathrm{e}^{-s^2}\,\mathrm{d}s
\end{aligned}$$

On définit ensuite les deux fonctions u et v sur $]0, +\infty[$ par $u(s) = \mathrm{e}^{-s^2}$ et $v(s) = -u$.
u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et, pour $s > 0$,

$$u'(s) = -2s\mathrm{e}^{-s^2}, \qquad v'(s) = -1$$

On a $u(s)v(s) = -s\mathrm{e}^{-s^2}$ donc $\lim_{u\to 0} u(s)v(s) = 0$.
Or, par croissance comparée $\lim_{y\to+\infty} y^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-y} = 0$, d'où, par composition de limites, $\lim_{s\to+\infty} u(s)v(s) = 0$.
Comme $G\left(\frac{1}{2}\right)$ converge, on obtient, par intégration par parties

$$\begin{aligned}
G\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^{+\infty} 2s^2\mathrm{e}^{-s^2}\,\mathrm{d}s \\
&= \int_0^{+\infty} u'(s)v(s)\,\mathrm{d}s \\
&= \lim_{s\to+\infty} u(s)v(s) - \lim_{s\to 0} u(s)v(s) - \int_0^{+\infty} u(s)v'(s)\,\mathrm{d}s \\
&= 0 - 0 + \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-s^2}\,\mathrm{d}s \\
&= I_{\mathcal{G}} \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{2}
\end{aligned}$$

Finalement $\boxed{G\left(\frac{1}{2}\right) = I_{\mathcal{G}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$.

4. (a) Soit $A > 0$ et soit $x \in [0, A]$, on peut envisager deux cas :

   - si $t \in]0, 1]$, $|t^x| = \mathrm{e}^{x\ln(t)} \leqslant 1$ car $\ln(t) \leqslant 0$, $x \geqslant 0$ donc $x\ln(t) \leqslant 0$.

   - si $t \in [1, +\infty[$, $|t^x| = \mathrm{e}^{x\ln(t)} \leqslant t^A$ car $0 \leqslant x \leqslant A$, comme $\ln(t) \geqslant 0$, on a $0 \leqslant x\ln(t) \leqslant A\ln(t)$ et par croissance de exp, on a $1 \leqslant |t^x| \leqslant t^A$.

   Ainsi pour tout $x \in [0, A]$ et pour tout $t > 0$ on a $|t^x| \leqslant \left(1 + t^A\right)$ et la multiplication de cette inégalité par $\mathrm{e}^{-t} > 0$ permet de déduire que : $\boxed{|t^x\mathrm{e}^{-t}| \leqslant \left(1 + t^A\right)\mathrm{e}^{-t}}$

(b) On note $g(x,t)=t^x\mathrm{e}^{-t}=\mathrm{e}^{x\ln(t)}\mathrm{e}^{-t}$ pour $x\in I=[0,A]$ et $t\in J=]0,+\infty[$.

- pour tout $x\in I$, $t\mapsto g(x,t)$ est continue sur J.

- pour tout $t\in J$, $x\mapsto g(x,t)$ est continue sur I (car $x\mapsto \mathrm{e}^{kx}$ l'est)

- *Hypothèse de domination*
  pour tout $x\in I$ et $t\in J$, d'après 4.(a), $|g(x,t)|\leqslant \left(1+t^A\right)\mathrm{e}^{-t}=\varphi_0(t)$.
  Et comme vu en question 1., la fonction φ_0 est intégrable sur $]0,+\infty[$.

D'après le théorème de continuité des intégrales à paramètres, $\boxed{G \text{ est continue sur } [0,A] \text{ pour tout } A>0}$.

(c)
- pour tout $x\in I$, $t\mapsto g(x,t)$ est **intégrable** sur J d'après le $\star_3$ de 4 (b)

- pour tout $t\in J$, $x\mapsto g(x,t)$ est C^1 sur I (car $x\mapsto \mathrm{e}^{kx}$ l'est) et on a $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)=\ln(t)g(x,t)$.

- pour tout $x\in I$, $t\mapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)=g_1(x,t)=\ln(t)g(x,t)$ est continue sur I (car $t\mapsto g(x,t)$ et ln le sont).

- *Hypothèse de domination*
  pour tout $x\in I$ et $t\in J$, d'après 4.(a),

$$\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right|=|\ln(t)||g(x,t)|\leqslant \left(1+t^A\right)|\ln(t)|\mathrm{e}^{-t}=\varphi_1(t)$$

  Et la fonction φ_1 est intégrable sur $]0,+\infty[$:

  — en 0 : $\varphi_1(t)\underset{t\to 0}{\sim}|\ln(t)|$ qui est intégrable en 0 donc φ_1 aussi.

  — en $+\infty$: $\ln(t)=o(t)$ donc $\varphi_1(t)\underset{t\to+\infty}{=}o(t^{A+1}\mathrm{e}^{-t})$ et, d'après 2. $t\mapsto t^{A+1}\mathrm{e}^{-t}$ est intégrable en $+\infty$, et donc φ_1 aussi.

D'après le théorème de dérivabilité des intégrales à paramètres, $\boxed{G \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [0,A] \text{ pour tout } A>0}$ et, on a $G'(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\ln(t)t^x\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$.

(d) On pose $g_1(x,t)=\ln(t)t^x\mathrm{e}^{-t}$ pour $x\in I=[0,A]$ et $t\in J=]0,+\infty[$.

- pour tout $x\in I$, $t\mapsto g_1(x,t)$ est **intégrable** sur J d'après le $\star_4$ de 4 (c)

- pour tout $t\in J$, $x\mapsto g_1(x,t)$ est C^1 sur I (car $x\mapsto \mathrm{e}^{kx}$ l'est) et on a $\dfrac{\partial g_1}{\partial x}(x,t)=\ln^2(t)g(x,t)$.

- pour tout $x\in I$, $t\mapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)=\ln^2(t)g(x,t)$ est continue sur I (car $t\mapsto g(x,t)$ et ln le sont).

- *Hypothèse de domination*

pour tout $x \in I$ et $t \in J$, d'après 4.(a),

$$\left|\frac{\partial g_1}{\partial x}(x,t)\right| = |\ln^2(t)||g(x,t)| \leqslant \left(1+t^A\right)|\ln^2(t)|\mathrm{e}^{-t} = \varphi_2(t)$$

Et la fonction φ_2 est intégrable sur $]0,+\infty[$:

— en 0 : $\varphi_2(t) \underset{t\to 0}{\sim} \ln^2(t) = o(1/\sqrt{t})$ qui est intégrable en 0 donc φ_2 aussi.

— en $+\infty$: $\ln^2(t) \underset{t\to+\infty}{=} o(t)$ donc $\varphi_2(t) \underset{t\to+\infty}{=} o(t^{A+1}\mathrm{e}^{-t})$ et, comme précédemment φ_2 est intégrable en $+\infty$.

D'après le théorème de dérivabilité des intégrales à paramètres, G' est C^1 sur $[0,A]$ donc $\boxed{G \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } [0,A] \text{ pour tout } A>0}$ et on a

$$\boxed{\forall x[0,A], \qquad G''(x) = \int_0^{+\infty} \ln^2(t)t^x\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t}$$

(e) Pour tout $A>0$, G est C^2 sur $[0,A]$ donc G est C^2 sur $= \bigcup\limits_{A>0}[0,A] = [0,+\infty[$.

Partie II

1. Pour tout $x \geqslant 0$, $(x+1)G(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} (x+1)t^x \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$. On définit les fonctions u et v sur $]0,+\infty[$ par $u(t) = t^{x+1}$ et $v(t) = \mathrm{e}^{-t}$, fonctions de classe C^1, avec $u'(t) = (x+1)t^x$ et $v'(t) = -\mathrm{e}^{-t}$.
   On a $u(t)v(t) = t^{x+1}\mathrm{e}^{-t} = \mathrm{e}^{(x+1)\ln(t)}\mathrm{e}^{-t}$. Or $\lim\limits_{t\to 0}(x+1)\ln(t) = -\infty$ donc $\lim\limits_{t\to 0} t^{x+1}\mathrm{e}^{-t} = 0$.
   Et $\lim\limits_{t\to+\infty} t^{x+1}\mathrm{e}^{-t} = 0$ par croissance comparée.
   De plus l'intégrale existe, donc par intégration par parties : $(x+1)G(x) = \left[t^{x+1}\mathrm{e}^{-t}\right]_0^{+\infty} + \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x+1}\mathrm{e}^{-t} = G(x+1)$

2. On va procéder par récurrence On pose $\mathcal{P}_n$ la propriété : $G(n) = n!$

   - Initialisation :
     on a $G(0) = 1$ (question $I)B)2.$) et $0! = 1$ donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

   - Hérédité :
     Soit $n \in \mathbb{N}$,, on suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie
     On a donc $G(n) = n!$.
     D'après la question 1., $(n+1)G(n) = G(n+1)$, on en déduit que $G(n+1) = (n+1)n! = (n+1)!$.
     Ainsi $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
     On a donc montré par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{G(n) = n!.}$

3. G est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,+\infty[$, donc par composition $x \mapsto G(x+1)$ est $\mathcal{C}^2$ sur $[-1,+\infty[$.
   Par quotient la fonction $\tilde{G}$ est donc C^2 sur $]-1,+\infty[$.
   Par ailleurs avec la question 1., pour tout $x \geqslant 0$, on a $\tilde{G}(x) = \dfrac{G(x+1)}{x+1} = \dfrac{(x+1)G(x)}{x+1} = G(x)$.
   Ainsi $\boxed{\tilde{G} \text{ prolonge la fonction } G \text{ sur }]-1,+\infty[}$.

4. La fonction G est continue sur $[0,+\infty[$ donc $\lim\limits_{x\to-1^+} G(x+1) = G(0) = 1$ et ainsi $G(x+1) \underset{x\to-1^+}{\sim} 1$.
   On en déduit que $\boxed{\tilde{G}(x) \underset{x\to-1^+}{\sim} \dfrac{1}{x+1}}$

5. Nous savons que $\tilde{G}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]-1,+\infty[$ et que $\tilde{G}(x) = G(x+1) \times \dfrac{1}{x+1}$.
   On dérive l'expression comme un produit avec la formule de Leibniz :
   $$\tilde{G}''(x) = \frac{G''(x+1)}{x+1} - 2\frac{G'(x+1)}{(x+1)^2} + 2\frac{G(x+1)}{(x+1)^3}$$
   Puis, pour tout $x > -1$, on a
   $$(x+1)^3\tilde{G}''(x) = \int_0^{+\infty} \left((x+1)^2\ln(t)^2 - 2(x+1)\ln(t) + 2\right) t^{x+1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$$

6. On a, pour tout $y \in \mathbb{R}$, $y^2 - 2y + 2 = (y-1)^2 + 1 \geqslant 1$. Donc, pour tout $x > -1$ et tout $t > 0$, on a, en prenant $y = (x+1)\ln(t)$,
   $$\left((x+1)^2\ln(t)^2 - 2(x+1)\ln(t) + 2\right) > 0$$

et donc
$$\left((x+1)^2\ln(t)^2-2(x+1)\ln(t)+2\right)t^{x+1}\mathrm{e}^{-t}>0$$
Pour $x>-1$ fixé, on a
$$forall t>0,\qquad \left((x+1)^2\ln(t)^2-2(x+1)\ln(t)+2\right)t^{x+1}\mathrm{e}^{-t}\geqslant 0$$
et par positivité de l'intégrale (convergente) on déduit que $(x+1)^3\tilde{G}''(x)\geqslant 0$ pour tout $x>-1$ et donc $\tilde{G}''(x)\geqslant 0$.

Par l'absurde, si $\tilde{G}''(x)=0$, alors, comme la fonction intégrée : $t\mapsto\left((x+1)^2\ln(t)^2-2(x+1)\ln(t)+2\right)t^{x+1}\mathrm{e}^{-t}$ est positive et continue sur $]0,+\infty[$, elle serait nulle sur sur $]0,+\infty[$. Or ceci est impossible car cette fonction est toujours strictement positive. Ainsi $\boxed{\text{pour tout } x>-1,\ G''(x)>0}$.

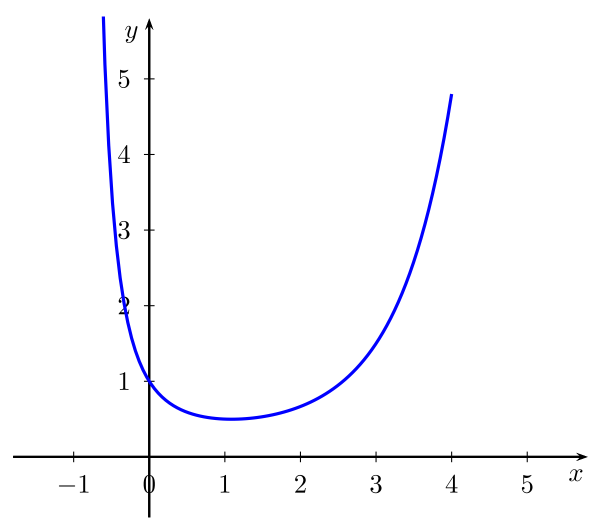
7. D'après la partie $I.A)$, comme $\tilde{G}''$ est strictement positive, nous pouvons dire que le graphe de $\Gamma_{\tilde{G}}$ est en tout point strictement au dessus de ses tangentes (sauf au point de contact).

8. D'après la question 2, on a $\tilde{G}(0)=G(1)=1!$ et $\tilde{G}(1)=\dfrac{G(2)}{2}=\dfrac{2!}{2}=1$.
$\tilde{G}$ est continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$ (elle est même de classe C^2 sur $]-1,+\infty[$) avec $\tilde{G}(0)=\tilde{G}(1)=1$.
D'après le théorème de Rolle, il existe $c\in]0,1[$, tel que $\tilde{G}'(c)=0$.
Ainsi il existe $\boxed{\text{un point } c\in]0,1[\text{ tel que la tangente au graphe de la fonction } \tilde{G} \text{ est horizontale}}$.

9. Comme $\tilde{G}''>0$, la fonction $\tilde{G}'$ est strictement croissante sur l'intervalle $[0,1]$. De plus, $\tilde{G}'(c)=0$, Ainsi si $x>c$, on a $\tilde{G}'(x)>0$ et, si $x<c$, on a $\tilde{G}'(x)<0$.
Par conséquent $\tilde{G}$ est strictement décroissante sur $]-1,c]$ et strictement croissante sur $[c,+\infty[$.
D'après la question $I(B)4$. on a $\tilde{G}(x)\underset{x\to-1^+}{\sim}\dfrac{1}{x+1}$ et donc $\boxed{\lim_{x\to-1^+}\tilde{G}(x)=+\infty}$.
Pour $x\geqslant 1$, on pose $N_x=\lfloor x\rfloor$, on a $N_x>x-1$ donc $\lim_{x\to+\infty}N_x=+\infty$.
On a aussi $x\geqslant N_x\geqslant 1$ et, par croissance de $\tilde{G}$ sur $[1,+\infty[\subset]c,+\infty[$ on a $\tilde{G}(x)\geqslant\tilde{G}(N_x)=\dfrac{G(N_x+1)}{N_x+1}=(N_x)!$
et donc $\boxed{\lim_{x\to+\infty}\tilde{G}(x)=+\infty}$.

10.

Figure .1



Partie III

1. La fonction $h : u \mapsto \mathrm{e}^{u^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc, d'après le théorème fondamental de l'analyse, H est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ (de dérivée h)

   D'autre part la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc, par produit, $\boxed{F \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}.}$

2. Pour $X \in \mathbb{R}$, on a $\mathrm{e}^X = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{X^k}{k!}$. Soit $x \in \mathbb{R}$, avec $X = -x^2 \in \mathbb{R}$, on a donc $\mathrm{e}^{-x^2} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{k!}$.

   On en déduit que la fonction $g : x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ (rayon de convergence $R_1 = +\infty$).

   De la même façon, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = \mathrm{e}^{x^2} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{k!}$, donc h est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ (rayon de convergence $R_2 = +\infty$).

   Or H est une primitive de h sur $\mathbb{R}$, d'après le théorème de primitivation termes à termes des séries entières, il existe une constante A telle que

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad H(x) = A + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)k!}$$

   et comme $H(0) = 0$, on a $A = 0$.

   Ainsi H est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ (de rayon de convergence $R_2 = +\infty$).

   Par produit de Cauchy, $\boxed{F \text{ est développable en série entière sur } \mathbb{R} \text{ (rayon de convergence } R_3 = +\infty).}$

3. D'après la question 1, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $H'(x) = \mathrm{e}^{x^2}$, donc $F'(x) = -2x\mathrm{e}^{-x^2} \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{u^2} du + \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{e}^{x^2}$.

   Soit $F'(x) = -2xF(x) + 1$ sur $\mathbb{R}$ et donc $\boxed{F \text{ est solution sur } \mathbb{R} \text{ de } (\mathcal{E}).}$

4. D'après la question 2, F est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

   On peut donc écrire $F(x)$ sous la forme

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

   Par dérivation d'une série entière, on a

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad F'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$$

   Or F est solution de $(\mathcal{E})$ donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
   $F'(x) = -2xF(x) + 1$ c'est-à-dire

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = 1 - 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1}$$

   et, en posant $k = n - 1$ dans la première somme et $k = n + 1$ dans la deuxième, on obtient

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1) a_{k+1} x^k = 1 - 2\sum_{k=1}^{+\infty} a_{k-1} x^k$$

   Par unicité du développement en série entière, on obtient : $\begin{cases} a_1 = 1 \text{ (coefficients constants)} \\ (k+1)a_{k+1} = -2a_{k-1} \text{ pour tout } k \geqslant 1 \text{ (coefficients de } x^k) \end{cases}$

   On obtient donc les relations suivantes :

$$\boxed{a_0 = F(0) = 0, \qquad a_1 = 1, \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = \frac{-2}{n+2}a_n}$$

5. On note $\mathcal{P}(p)$ la propriété $a_{2p} = 0$ et $a_{2p+1} = \dfrac{(-1)^p 4^p p!}{(2p+1)!}$.

— Initialisation : on a $a_0 = F(0) = 0$ et $a_1 = 1$. D'autre part $\dfrac{(-1)^0 4^0 0!}{1!} = 1$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

— Hérédité : on suppose que $\mathcal{P}(p)$ est vraie pour un certain $p \in \mathbb{N}$, on a donc $a_{2p} = 0$ et $a_{2p+1} = \dfrac{(-1)^p 4^p p!}{(2p+1)!}$.
D'après la question 4 (avec $n = 2p \in \mathbb{N}$), on a $a_{2(p+1)} = a_{2p+2} = \dfrac{-2}{2p+2}a_{2p} = 0$ et

$$\begin{aligned}
a_{2(p+1)+1} &= a_{2p+3} \\
&= \frac{-2}{2p+3}a_{2p+1} \\
&= \frac{-2}{2p+3} \times \frac{(-1)^p 4^p p!}{(2p+1)!} \\
&= \frac{-2}{2p+3} \times \frac{2p+2}{2p+2} \times \frac{(-1)^p 4^p p!}{(2p+1)!} \\
&= \frac{-4(p+1)(-1)^p 4^p p!}{(2p+3)(2p+2)(2p+1)!} \\
&= \frac{(-1)^{p+1} 4^{p+1} (p+1)!}{(2p+3)!}
\end{aligned}$$

$\mathcal{P}(p+1)$ est ainsi vraie.

— On a montré par récurrence que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\boxed{a_{2p} = 0 \text{ et } a_{2p+1} = \dfrac{(-1)^p 4^p p!}{(2p+1)!}.}$

6. D'après la question 2 F est développable en série entière de rayon $+\infty$ et, d'après la question 5.5, on a

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 4^n n!}{(2n+1)!} x^{2n+1}}$$

Il est important de justifier que F admet un développement en série entière de rayon infini. Le fait que F soit définie sur $\mathbb{R}$ ne suffit pas. Par exemple la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ mais n'est développable en série entière que sur $]-1,1[$.

7. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\left| \frac{\frac{(-1)^{n+1}4^{n+1}(n+1)!}{(2n+3)!}}{\frac{(-1)^n 4^n n!}{(2n+1)!}} \right| = \frac{4(n+1)}{(2n+2)(2n+3)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Ainsi, d'après le critère de D'Alembert pour les séries,

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n 4^n n!}{(2n+1)!} \text{ converge absolument donc converge.}}$$

On aurait aussi pu justifier que, d'après les questions précédentes, F est développable en série entière de rayon $+\infty$ et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 4^n n!}{(2n+1)!} x^{2n+1}$.

En particulier la série converge absolument pour $x = 1$ et on a $F(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 4^n n!}{(2n+1)!}$.

8. D'après la question 2., on a

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad H(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{t^2} \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)k!}}$$

De plus, en reprenant la question 2. on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)k!} \right) \times \left(\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{k!} \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k 4^k k!}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

On note, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$b_{2k} = 0, \qquad b_{2k+1} = \frac{1}{(2k+1)k!}, \qquad c_{2k} = \frac{(-1)^k}{k!}, \qquad c_{2k+1} = 0$$

La formule du produit de Cauchy nous donne alors

$$\forall m \in \mathbb{N}, \qquad a_m = \sum_{p=0}^{m} b_p c_{m-p}$$

Pour $m = 2n+1$, on obtient

$$a_{2n+1} = \sum_{p=0}^{2n+1} b_p c_{2n+1-p} = \sum_{k=0}^{n} b_{2k+1} c_{2n+1-(2k+1)}$$

i.e $a_{2n+1} = \sum_{k=0}^{n} b_{2k+1} c_{2(n-k)}$ et en remplaçant :

$$\frac{(-1)^n 4^n n!}{(2n+1)!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)k!} \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!}$$

En multipliant par $(-1)^n n!$, on obtient

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \frac{4^n}{(2n+1)\binom{2n}{n}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{n}{k}}$$